الامتحان التجريبي الثالث لنيل شهادة البكالوريا مدينة زايو 2018

المادة	الرياضيات	المعامل	9		
الشعبة	شعبة العلوم الرياضيات (أ) و (ب)	مدة الإنجاز	4		

بسم الله الرحمن الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية..........................(3.00 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية..........................(3.00 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..........................(4.00 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..........................(10.00 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذ : سفيان طجيو و عبد العلي طجيو

التمرين الأول: (3 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$(E_\theta): z^2-(1+i)e^{i\theta}z+ie^{i2\theta}=0$، مع : $\theta\in[0,2\pi]$.

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ). 0.50 ن

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي : $z_1=e^{i\theta}$ و $z_2=ie^{i\theta}$.

1) بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين وقائم الزاوية في O. 0.50 ن

2) نفترض أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

-a بين أنه عندما تتغير θ على المجال $[0,2\pi]$، النقطة I تتغير على الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O وشعاعها $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 0.50 ن

-b بين أن المستقيم (M_1M_2) مماس للدائرة $(\mathcal{C})$. 0.50 ن

3) نفترض أن : $\theta\in[0,\pi]$.

-a بين أن : $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{M_1M_2})}\equiv\theta+\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ 0.50 ن

-b استنتج قيمة θ التي يكون من أجلها المستقيم (M_1M_2) موازي لـ $(O,\vec{v})$. 0.50 ن

التمرين الثاني : (3 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$(E_m): z^2-2(m+2i)z+2m^2+4mi-4=0$، حيث : $m\in\mathbb{C}$.

✓ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m). 0.50 ن

الجزء الثاني : المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد وممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نفترض أن $m\in\mathbb{C}-\{-2,0,2\}$ ونضع : $z'=(1+i)m+2i$ و $z''=(1-i)m+2i$.

نعتبر النقط M و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي m و z' و z''.

1) -a بين أن : $z''=-iz'-2+2i$. 0.25 ن

-b بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة $M'(z')$ بالنقطة $M''(z'')$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه I وقياسا لزاويته θ. 0.50 ن

2) نفترض أن النقطة J منتصف القطعة $[M'M'']$.

0.50 ن **-a** حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة M إلى النقطة J.

0.50 ن **-b** بين أن المستقيمين $(M'M'')$ و (IJ) متعامدان.

0.75 ن **3)** حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون النقط I و M و M' و M'' متداورة.

التمرين الثالث: (4 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E_\theta): z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0 \text{ ، حيث : } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

0.50 ن **1) -a** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ).

0.50 ن **-b** أكتب حلول المعادلة (E_θ) على الشكل الأسي.

2) في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي : -1 و 1 و $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ و $z_2 = 1 - ie^{i\theta}$، مع $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

0.50 ن **-a** بين أن M_1 تتغير على المجموعة (Γ_1) عندما يتغير θ على المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$، مع تحديد المجموعة (Γ_1).

0.25 ن **-b** بين أن M_2 هي صورة M_1 بتماثل المركزي الذي مركزه النقطة B ذات اللحق 1.

0.25 ن **-c** استنتج المجموعة (Γ_2) التي تتغير عليها M_2 عندما تتغير θ على المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

0.25 ن **-d** بدون أي حساب، بين أنه لكل θ من المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O.

0.50 ن **-e** حدد قيم θ لكي يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين.

الجزء الثاني: في نفس المستوى العقدي (P) السابق نعتبر النقطتين M و M' التي ألحاقها على التوالي : z و $z' = \dfrac{z+1}{z-1}$ بحيث : $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

0.50 ن **1) -a** بين أن : $(\vec{u},\overrightarrow{BM}) + (\vec{u},\overrightarrow{BM'}) \equiv 0[2\pi]$، ثم استنتج أن نصف المستقيم $[BA)$ منصف الزاوية $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

0.50 ن **-b** بين أن z' تخيلي صرفا إذا وفقط إذا كان $|z| = 1$.

0.25 ن -c استنتج طريقة للإنشاء النقطة $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ من الدائرة المثلثية المحرومة من النقطة B.

التمرين الرابع: (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right); f(x)=\ln(x)e^{-\frac{1}{x}} \text{ و } f(0)=0$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.50 ن **I** ـ 1) بين أن f متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

0.50 ن 2) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ثم حدد $f'_d(0)$.

0.50 ن 3) بين أن : $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right); f'(x)=\dfrac{\ln x+x}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

0.50 ن 4) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln x+x$

0.25 ن -a بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$.

0.50 ن -b بين أن : $\dfrac{1}{3}<\alpha<\dfrac{2}{3}$، ثم أدرس إشارة الدالة g على المجال $]0,+\infty[$.

0.25 ن -c استنتج جدول تغيرات الدالة f.

6) نقبل أن النقطة $D(1;0)$ نقطة انعطاف ونأخذ : $\alpha\approx 0{,}6$ و $f(\alpha)\approx -0.1$.

0.50 ن ✓ أنشئ المنحنى (C_f). (نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\ cm$).

II ـ نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$

0.25 ن 1) -a بين أن : $g\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ⟸ $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right);\ h(x)=x\Leftrightarrow g\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

0.25 ن -b استنتج أن المعادلة $h(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\dfrac{1}{\alpha}$ في المجال $]0,+\infty[$.

0.50 ن -c بين أن : $\left(\forall x\in\left[\dfrac{3}{2};3\right]\right);\ |h'(x)|\le\dfrac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$.

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=h(u_n);\ (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0=2 \end{cases}$

a- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\ \frac{3}{2}\leq u_n\leq 2$. — 0.50 ن

b- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\ \left|u_n-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n e^{\frac{2n}{3}}$. — 0.50 ن

c- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محدداً نهايتها. — 0.25 ن

III- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

1) a- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});1-x\leq e^{-x}$، ثم أن : $(\forall t\in[1,+\infty[);f(t)\geq\ln t-\frac{\ln t}{t}$. — 0.50 ن

b- بين أن : $(\forall x\in[1,+\infty[);F(x)\geq x\ln x-x-\frac{\ln^2 x}{2}$، ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. — 0.75 ن

2) a- بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$، ثم حدد دالتها المشتقة الأولى F'. — 0.50 ن

b- ضع جدول تغيرات الدالة F. — 0.25 ن

3) a- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$، المعادلة $F(x)=n$ تقبل حلا وحيداً α_n في المجال $[1,+\infty[$. — 0.25 ن

b- بين أن : $\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f(t)\,dt=1$; $(\forall n\in\mathbb{N})$ واستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية. — 0.50 ن

c- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$. — 0.50 ن

4) نقبل أن : $(\forall x\in[1,+\infty[);f(x)\leq(x-1)e^{-1}$.

a- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ n\leq\frac{(\alpha_n-1)^2}{2}e^{-1}$. — 0.50 ن

b- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}=+\infty$. — 0.50 ن

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance ☺